Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54
УДК 517.988.63+517.968.4+515.124.4

Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций

Вассим МЕРЧЕЛА
Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, Гельма, П.Я. 401

On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions

Wassim MERCHELA
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University May 8, 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Аннотация. Рассматривается уравнение $G(x) = \tilde{y}$, где отображение G действует из метрического пространства X в пространство Y, на котором определено расстояние, $\tilde{y} \in Y$. Метрика в X и расстояние в Y могут принимать значение ∞, расстояние удовлетворяет лишь одному свойству метрики: расстояние между $y, z \in Y$ равно нулю тогда и только тогда, когда $y = z$. Для отображений $X \to Y$ определены понятия множеств накрывания, липшицевости и замкнутости. В этих терминах получено утверждение об устойчивости в метрическом пространстве X решений рассматриваемого уравнения к изменениям отображения G и элемента $\tilde{y}$. Это утверждение применено к исследованию интегрального уравнения

$$f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0,1],$$

относительно неизвестной измеримой по Лебегу функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Получены достаточные условия устойчивости решений (в пространстве измеримых функций с топологией равномерной сходимости) к изменениям функций $f, \mathcal{K}, \tilde{y}$.

Ключевые слова: операторное уравнение; существование решений; устойчивость решений; накрывающее отображение; расстояние; пространство измеримых функций; интегральное уравнение

Для цитирования: *Мерчела В.* Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 44–54. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54.

Abstract. Consider the equation $G(x) = \tilde{y}$, where the mapping G acts from a metric space X into a space Y, on which a distance is defined, $\tilde{y} \in Y$. The metric in X and the distance in Y can take on the value ∞, the distance satisfies only one property of a metric: the distance between $y, z \in Y$ is zero if and only if $y = z$. For mappings $X \to Y$ the notions of sets of covering, Lipschitz property, and closedness are defined. In these terms, the assertion is obtained about the stability in the metric space X of solutions of the considered equation to changes of the mapping G and the element $\tilde{y}$. This assertion is applied to the study of the integral equation

$$f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0.1],$$

with respect to an unknown Lebesgue measurable function $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Sufficient conditions are obtained for the stability of solutions (in the space of measurable functions with the topology of uniform convergence) to changes of the functions $f, \mathcal{K}, \tilde{y}$.

Keywords: operator equation; existence of solutions; stability of solutions; covering mapping; distance; space of measurable functions; integral equation

For citation: Merchela W. Ob ustoychivosti resheniy integral'nykh uravneniy v klasse izmerimykh funktsiy [On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 44–54. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Результаты о неподвижных точках операторов — один из основных инструментов доказательства теорем существования решений различных классов уравнений, в том числе дифференциальных, интегральных, функционально-дифференциальных. Так, в большинстве работ по интегральным уравнениям (см., например, [1–3]) исследуются уравнения вида

$$x(t) = f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big), \quad t \in [0,1]. \tag{0.1}$$

Разрешенность уравнения (0.1) относительно неизвестной функции x позволяет применить к его изучению результаты о неподвижных точках. Однако, если уравнение не разрешено относительно неизвестной функции (или ее производной), условия его разрешимости, как правило, не удается получить с помощью теорем о неподвижной точке. Для исследования таких уравнений часто оказываются эффективными утверждения о точках совпадения и об операторных уравнениях, использующие свойства накрывания (также называемого регулярностью) отображений в метрических пространствах или в более общих пространствах с расстоянием. Такой подход для нелинейных интегральных уравнений Вольтерры, не разрешенных относительно неизвестной существенно ограниченной функции, был реализован в [4]. Аналогичные методы были использованы в [5] при исследовании задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Для таких уравнений утверждения об уравнениях с накрывающими отображениями метрических пространств позволили также исследовать корректность задачи Коши (см. [6]), получить условия существования и оценки решений краевых задач (см. [7]), задач управления (см. [8, 9]).

Распространения на обобщенные метрические пространства результатов о накрывающих отображениях, полученные в работах [10–12], открывают возможности исследования более широких классов уравнений. В данной статье демонстрируются такие возможности применительно к интегральному уравнению в пространстве измеримых функций.

В первой части вводятся основные понятия, в том числе определяются множества накрывания и липшицевости отображения, действующего из метрического пространства в пространство с расстоянием. Далее рассматривается абстрактное уравнение с отображением, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием. Получены условия устойчивости решений к изменениям этого отображения. Во второй части статьи определяются расстояния между измеримыми функциями, а также исследуются множества накрывания и липшицевости конкретных отображений, действующих в полученных пространствах. Это утверждение в третьей заключительной части статьи применяется к исследованию нелинейного интегрального уравнения в пространстве измеримых функций. Здесь получены условия существования и устойчивости решений к изменениям функций, определяющих уравнение.

1. Основные понятия

Стандартно обозначаем через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Эти множества полагаем линейно упорядоченными «естественным числовым порядком», причем $+\infty > r$ при любом $r \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (если $r = +\infty$, то $B_X(x_0, +\infty) = X$ при любом x_0).

Пусть также задано множество $Y \neq \emptyset$. *Расстоянием* в Y называют отображение $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \tag{1.1}$$

(в отличие от метрики, расстояние d может быть несимметричным и может не удовлетворять неравенству треугольника). Будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$ и писать $y_i \to y$, если $d(y_i, y) \to 0$.

Для отображения $f : X \to Y$ при определении аналогов классических понятий непрерывности и замкнутости следует учитывать, что в случае сходимости последовательности $f(x_i)$ ее предел может быть не единственным. Поэтому, например, требование замкнутости графика отображения $f : X \to Y$ является чрезвычайно ограничительным. В связи с этим обстоятельством в [11, 13] введено следующее понятие *множества замкнутости отображения* f *относительно множества* $U \subset X$,

$$\mathrm{Cl}[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall \{x_i\} \subset U \ x_i \to x, \ f(x_i) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y\big\}.$$

Для характеристики свойств накрывания и липшицевости определим еще два термина, введенные для отображений метрических пространств в [14] и распространенные на рассматриваемые здесь отображения $X \to Y$ в [11, 13]. Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ и множество $U \subset X$. Определим множества

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \exists u \in U \ f(u) = y, \ \rho(x, u) \le \alpha^{-1} d(f(x), y), \ \ \rho(x, u) < \infty\big\},$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \ f(u) = y \ \Rightarrow \ d(f(x), y) \le \beta \rho(x, u)\big\},$$

которые будем называть, соответственно, множествами *α-накрывания* и *β-липшицевости отображения* f *относительно* U.

Для определенных здесь множеств справедливы соотношения:

$$U \subset \overline{U} \subset X \times Y \ \Rightarrow \ \mathrm{Cl}[f; U] \supset \mathrm{Cl}[f; \overline{U}], \quad \mathrm{Cov}_\alpha[f; U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[f; \overline{U}], \quad \mathrm{Lip}_\beta[f; U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[f; \overline{U}]. \tag{1.2}$$

Отметим, что используемые в теореме Арутюнова [15] о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ (в случае, когда оба пространства X и Y метрические) свойства α-накрывания отображения ψ и β-липшицевости отображения φ равносильны равенствам $\mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X] = X \times Y$, $\mathrm{Lip}_\beta[\varphi; X] = X \times Y$. Теорема Арутюнова в [10] была распространена на отображения f-квазиметрических пространств, в [12] — на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Сформулируем это утверждение.

Пусть заданы отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x, x) = \tilde{y}. \tag{1.3}$$

Исследуем устойчивость решений уравнения (1.3) к изменениям отображения F и элемента $\tilde{y}$. Но прежде приведем условия разрешимости этого уравнения.

Лемма 1.1 (см. [11])**.** *Пусть метрическое пространство X полное и задан элемент $x_0 \in X$ такой, что $d\big(F(x_0, x_0), \tilde{y}\big) < \infty$. Предположим, что существуют $\alpha > \beta \geq 0$ такие, что для любого $x \in U := B_X(x_0, R)$, где $R := (\alpha - \beta)^{-1} d\big(F(x_0, x_0), \tilde{y}\big)$, выполнены включения*

$$(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (1.3).

Теперь рассмотрим задачу об устойчивости решений уравнения (1.3), которую будем трактовать следующим образом. Пусть заданы отображения $F_i : X \times X \to Y$ и элементы $\tilde{y}_i \in Y$ $(i \in \mathbb{N})$. Нас интересуют достаточные условия существования при каждом i решения $x = \xi_i$ уравнения

$$G_i(x) := F_i(x, x) = \tilde{y}_i, \quad i \in \mathbb{N}\,. \tag{1.4}$$

и сходимости последовательности $\{\xi_i\}$ к решению уравнения (1.3).

Теорема 1.1. *Пусть метрическое пространство X полное и задано решение $x = \xi \in X$ уравнения* (1.3)*. Предположим, что при каждом $i \in \mathbb{N}$ существуют $\alpha_i > \beta_i \geq 0$ такие, что при $i \to \infty$ имеет место сходимость*

$$R_i := \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} d\big(F_i(\xi, \xi), \tilde{y}_i\big) \to 0$$

и для любого $x \in U_i := B_X(\xi, R_i)$ выполнены включения

$$(x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}[F_i(x, \cdot); U_i], \quad (x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Cl}[G_i; U_i]. \tag{1.5}$$

Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ существует решение $x = \xi_i$ уравнения (1.4) *такое, что $\xi_i \to \xi$ при $i \to \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 уравнение (1.4) имеет решение $x = \xi_i$, принадлежащее шару $U_i = B_X(\xi, R_i)$. Так как при $i \to \infty$ для радиуса этого шара выполнено $R_i \to 0$, получаем, что последовательность $\{\xi_i\}$ сходится в метрическом пространстве X к элементу ξ. $\square$

Отметим, что в случае, когда оба пространства X и Y являются метрическими, условия устойчивости операторных уравнений вида (1.4) получены в [4], а условия устойчивости точек совпадения — в [16].

2. Множества накрывания и липшицевости отображений в пространствах измеримых функций

Здесь рассматриваются множества замкнутости, липшицевости и накрывания операторов, порождающих интегральное уравнение. Формулируемые здесь результаты с доказательствами содержатся в рукописи статьи «Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций» (авторы: Е.С. Жуковский, В. Мерчела), недавно представленной в журнал «Дифференциальные уравнения», и частично в работе [11].

Мы будем рассматривать интегральные уравнения в классе измеримых по Лебегу функций. Если окажется, что интеграл от некоторой измеримой функции не существует, будем писать, что этот интеграл равен ∞. Поэтому наряду с «обычным пространством» $\mathbb{R}$ действительных чисел будем рассматривать его расширение $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В $\overline{\mathbb{R}}$ определим разность двух элементов, среди которых есть ∞, соотношениями

$$\infty - \infty = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ x - \infty = \infty - x = \infty.$$

Определим операцию вычисления модуля как отображение $|\cdot| : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, причем, будем полагать, что $|\infty| = +\infty$.

Обозначим через $\overline{\mathbb{S}}$ пространство измеримых (по Лебегу) функций $u : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, а через $\mathbb{S}$ его подпространство, содержащее измеримые функции, принимающие только конечные значения. В пространстве $\overline{\mathbb{S}}$ определим расстояние следующим образом.

Пусть задана функция двух аргументов $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что при любом фиксированном втором аргументе $z \in \overline{\mathbb{R}}$ функция первого аргумента $\theta(\cdot, z) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна в точке z, выполнено $\theta(z,z) = 0$ и

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists \gamma = \gamma(z,\delta) > 0 \ \ \forall z' \in \overline{\mathbb{R}} \ \ |z' - z| \geq \delta \ \Rightarrow \ \theta(z', z) \geq \gamma.$$

В силу принятых предположений θ является расстоянием в $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим $\overline{\mathbb{R}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$.

Будем также предполагать, что функция θ суперпозиционно измерима: выполнено $\theta(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{S}}$ для любых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}$ (условия суперпозиционной измеримости для пространства $\mathbb{S}$ получены в [17], см. также [18, с. 110]; эти условия сохраняются и для рассматриваемого здесь пространства $\overline{\mathbb{S}}$). Определим отображение

$$d^{\theta} : \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \quad d^{\theta}(z_1, z_2) = \operatorname*{vraisup}_{t \in [0,1]} \theta(z_1(t), z_2(t)).$$

Для отображения d^{θ}, очевидно, выполнено соотношение (1.1), поэтому d^{θ} — расстояние в $\overline{\mathbb{S}}$. Определим пространство $\overline{\mathbb{S}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta})$ и его подпространство $\mathbb{S}^{\theta} := (\mathbb{S}, d^{\theta})$.

Примером функции $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, отвечающей всем сформулированным требованиям, является функция

$$\theta_0 : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Эта функция является метрикой в $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$.

Легко проверяется, что сходимости в пространствах $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ равносильны. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении непрерывных функций, определенных или имеющих значения в $\overline{\mathbb{R}}$, мы не будем оговаривать, относительно какого из расстояний θ или θ_0 они непрерывны.

Через функцию θ_0 в $\overline{\mathbb{S}}$ определяется метрика

$$d^{\theta_0}: \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \quad d^{\theta_0}(z_1, z_2) = \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{vrai\,sup}}\ |z_1(t) - z_2(t)|.$$

Соответствующее метрическое пространство измеримых функций обозначим через $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{S}}, \theta_0)$, а его подпространство конечных функций — через $\mathbb{S}^{\theta_0} := (\mathbb{S}, \theta_0)$. Оба метрических пространства $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$, $\mathbb{S}^{\theta_0}$ являются полными.

Теперь рассмотрим отображения $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, которые в следующем разделе будут использоваться для исследования интегральных уравнений.

Пусть задана функция $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что при любом $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$ функция $g(\cdot, x) : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна. Определим оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) соотношением

$$N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (N_g u)(t) = g(t, u(t)), \quad t \in [0,1].$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. $\mathrm{Cl}[N_g; \mathbb{S}^{\theta_0}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$.

Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что при любом $t \in [0,1]$ множество $\Phi(t) \subset \mathbb{R}$ не пусто и замкнуто. Обозначим

$$\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{ u \in \mathbb{S} \,|\, u(t) \in \Phi(t) \text{ при п.в. } t \in [0,1] \big\}.$$

Это множество измеримых сечений измеримого многозначного отображения Φ не пусто и, более того, для Φ имеет место представление Кастэна (см. [19, п. 8.1.2], [20, § 1.5]).

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть заданы* $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{S}$, $y \in \overline{\mathbb{S}}$. *Если для функции* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнено соотношение* $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g(t, \cdot); \Phi(t)\big]$, *то* $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[N_g; \mathrm{Sel}(\Phi)\big]$. *В частности, если* $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g(t, \cdot); \mathbb{R}\big]$ *при п.в.* $t \in [0,1]$, *то* $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[N_g; \mathbb{S}\big]$.

Утверждения, аналогичные предложениям 2.1 и 2.2, при более ограничительных предположениях на функцию θ получены в [11].

Теперь пусть заданы две функции: измеримая функция $\mathcal{K} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ и функция $\overline{g} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что при любом $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и п.в. $t \in [0,1]$ функция $\overline{g}(\cdot, x) : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, функция $\overline{g}(t, \cdot) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна. Определим линейный интегральный оператор

$$K : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}, \quad \forall u \in \mathbb{S} \quad (Ku)(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) u(s) ds, \quad t \in [0,1],$$

и нелинейный интегральный оператор

$$\Upsilon : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (\Upsilon u)(t) = \overline{g}\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) u(s) ds\big), \quad t \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Опишем множество липшицевости отображения Υ следующим утверждением.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Пусть*

$$k_0 := \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{vrai\,sup}} \int_0^1 |\mathcal{K}(t,s)| ds < \infty,$$

заданы $x \in \mathbb{S}$, $y \in \overline{\mathbb{S}}$, $\beta \geq 0$ *и многозначное отображение* $\Phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$, *со значениями* $\Phi(t) \neq \emptyset$, $t \in [0,1]$, *и такое, что* $\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{u \in \mathbb{S} \,|\, u(t) \in \Phi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,1]\big\} \neq \emptyset$. *Определим функцию* $v = Kx \in \overline{\mathbb{S}}$ *и многозначное отображение*

$$\Omega : [0,1] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}, \quad \Omega(t) = (K\Phi)(t) := \Big\{ \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, \ \forall u \in \mathrm{Sel}(\Phi) \Big\}, \quad t \in [0,1].$$

Тогда, если для функции $\overline{g}(t,\cdot) : \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнено соотношение* $\big(v(t), y(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}(t,\cdot); \Omega(t)\big]$, *то* $(x,y) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[\Upsilon; \mathrm{Sel}(\Phi)]$.

3. Интегральное уравнение

Применим полученные утверждения к задаче об устойчивости решений интегрального уравнения.

Пусть заданы измеримые функции $\mathcal{K}, \mathcal{K}_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$), удовлетворяющие условию

$$k_i := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \int_0^1 |\mathcal{K}_i(t,s)| ds < \infty, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Пусть также заданы функции $\tilde{y}, \tilde{y}_i \in \overline{\mathbb{S}}$ и функции $f : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримые по первому аргументу и непрерывные по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим последовательность уравнений

$$f_i\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}_i(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Сформулируем условия существования при каждом i решения $x = \xi_i \in \mathbb{S}$ уравнения (3.2) такого, что последовательность $\{\xi_i\} \subset \mathbb{S}$ сходится к решению $x = \xi \in \mathbb{S}$ уравнения

$$f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Для произвольной функции $x \in \mathbb{S}$ при любом $i \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\overline{g}_i^{[x]} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,1] \ \ \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \quad \overline{g}_i^{[x]}(t,u) = f_i(t,u,x(t)),$$
$$g_i^{[x]} : [0,1] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,1] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad g_i^{[x]}(t,u) = f_i(t, \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)x(s)ds, u).$$

Заданные здесь функции $g_i^{[x]}, \overline{g}_i^{[x]}$, очевидно, измеримы по первому аргументу и непрерывны по второму аргументу. Определим также при любом $i \in \mathbb{N}$ операторы $K_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$ соотношением

$$\forall u \in \mathbb{S} \ \ (K_i u)(t) = \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)u(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

Теорема 3.2. *Пусть задано решение* $\xi \in \mathbb{S}$ *уравнения* (3.3). *Предположим, что при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *существует* $\sigma_i > 0$ *такое, что при* $i \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$R_i := \frac{1}{\sigma_i} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \theta\left(f_i\big(t, (K_i\xi)(t), \xi(t)\big), \, \tilde{y}_i(t)\right) \to 0.$$

Далее, пусть для всех $i \in \mathbb{N}$ *существует* $\alpha_i > \sigma_i$ *такое, что для любой функции* $x \in U_i := B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены включения*

$$\big(x(t), \tilde{y}_i(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}\big[g_i^{[x]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \tag{3.4}$$

$$\big((K_i x)(t), \tilde{y}_i(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}\big[\overline{g}_i^{[x]}(t,\cdot);\overline{\Omega}_i(t)\big], \tag{3.5}$$

где $\beta_i := k_i^{-1}(\alpha_i - \sigma_i)$, $\overline{\Omega}_i(t) := [(K_i\xi)(t) - k_i R_i,\, (K_i\xi)(t) + k_i R_i]$. *Тогда для любого* $i \in \mathbb{N}$ *существует решение* $x = \xi_i \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ *уравнения* (3.2) *такое, что последовательность* $\{\xi_i\}$ *при* $i \to \infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{S}^{\theta_0}$ *к заданному решению* ξ *уравнения* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.2) — это уравнение вида (1.4), в котором отображения $F_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ ($i \in \mathbb{N}$) определены соотношением

$$\forall x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (F_i(x,u))(t) = f_i\big(t, (K_i u)(t), x(t)\big), \quad t \in [0,1],$$

а отображения $G_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ ($i \in \mathbb{N}$) — соотношением

$$\forall x \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad G_i x = F_i(x,x).$$

Покажем, что из предположений доказываемого утверждения следует выполнение условий теоремы 1.1 для данных отображений F_i, G_i.

Пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным.

Зафиксируем произвольное i. Покажем, что $\mathrm{Cl}[G_i;\mathbb{S}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$. Из этого равенства будет следовать третье включение в (1.5), так как в этом случае, в силу включения $\mathrm{Cl}[G_i;U_i] \supset \mathrm{Cl}[G;\mathbb{S}]$, будет выполнено $\mathrm{Cl}[G_i;U_i] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$.

Итак, пусть дана произвольная последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, элементы $x \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ и $y \in \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ такие, что

$$d^{\theta_0}(x_n, x) \to 0, \quad d^{\theta}\big(G_i x_n, y\big) \to 0 \quad (\text{при } n \to \infty).$$

Покажем, что справедливо равенство $G_i x = y$.

Из условия (3.1) вытекает, что $d^{\theta_0}(Kx_n, Kx) \le k_0 \rho(x_n, x) \to 0$. Согласно определению расстояний d^{θ_0}, d^{θ} между измеримыми функциями, получаем, что при п. в. $t \in [0,1]$ выполнены соотношения

$$\theta_0\big(x_n(t), x(t)\big) \to 0, \quad \theta_0\big((K_i x_n)(t), (K_i x)(t)\big) \to 0, \quad \theta\big((G_i x_n)(t), y(t)\big) \to 0.$$

Эти соотношения, в силу определения функций θ_0, θ равносильны «обычной сходимости»

$$x_n(t) \to x(t), \quad (K_i x_n)(t) \to (K_i x)(t), \quad (G_i x_n)(t) \to y(t).$$

Отсюда в силу непрерывности при п. в. $t \in [0,1]$ функции $f(t,\cdot,\cdot)$ (по совокупности двух аргументов) $(G_i x_n)(t) = f_i\big(t, (K_i x_n)(t), x_n(t)\big)$ сходится к $(G_i x)(t) = f_i\big(t, (K_i x)(t), x(t)\big)$. А так как, согласно принятым предположениям, имеет место сходимость $(G_i x_n)(t) \to y(t)$, получаем $(G_i x)(t) = y(t)$, $t \in [0,\tau]$. Равенство $\mathrm{Cl}[G_i;\mathbb{S}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ доказано.

При заданном фиксированном i для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ отображение $F_i(x,\cdot)$ представляется в виде оператора $\Upsilon : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, определенного соотношением (2.1), где функция $\overline{g} := \overline{g}^{[x]}$. Определим отображение $\Phi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ со значениями

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi_i(t) = [\xi(t) - R_i,\, \xi(t) + R_i].$$

Очевидно, это отображение измеримо, и множество его измеримых сечений $\mathrm{Sel}(\Phi_i) = B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$. Для $\Omega_i(t) := (K_i\Phi_i)(t)$ имеем $\Omega_i(t) \subset \overline{\Omega}_i(t)$, и поэтому из предположения (3.5) следует (см. третье из соотношений (1.2)) $\big((K_i x)(t), \tilde{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}\big[\overline{g}_i^{[x]}(t,\cdot); \Omega_i(t)\big]$. Согласно предложению 2.3 выполнено включение $(x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Lip}_{k_i\beta_i}[F_i(x,\cdot); B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)]$, в котором константа липшицевости $k_i\beta_i = \alpha_i - \sigma_i < \alpha_i$.

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ исследуем множество α_i-накрывания отображения $F_i(\cdot, x) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$. Это отображение есть оператор Немыцкого $N_{g_i^{[x]}} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, порожденный функцией $g_i^{[x]} : [0,1] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$. Из условия (3.4) согласно предложению 2.2 следует включение $(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}[F_i(\cdot, x); \mathbb{S}]$.

Итак, для отображений F_i, G_i выполнены все условия теоремы 1.1, и согласно этой теореме существует решение $x = \xi_i \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ уравнения (3.2) такое, что $\xi_i \to \xi$. □

В заключение отметим, что в большинстве работ по интегральным уравнениям исследуется уравнение (0.1), разрешенное относительно неизвестной функции. Это уравнение обычно рассматривается в банаховых пространствах непрерывных или суммируемых функций. Полученные здесь результаты позволяют исследовать не разрешенное относительно неизвестной функции интегральное уравнение не только в классе измеримых функций, но и в пространстве L_p суммируемых со степенью $p \in [1, \infty]$ на отрезке $[0,1]$ функций. При выполнении предположений теоремы 3.2, если дополнительно известно, что решение ξ «предельного уравнения» (3.3) принадлежит пространству L_p, то для любого $i \in \mathbb{N}$ существует решение $\xi_i \in L_p$ уравнения (3.2) такое, что последовательность $\{\xi_i\}$ сходится к функции ξ равномерно, а следовательно, и по норме пространства L_p.

References

[1] T. Diogo, A. Pedas, G. Vainikko, “Integral equations of the third kind in L^p spaces”, *J. Integral Equations Applications*, **32**:4 (2020), 417–427.

[2] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[3] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1991.

[4] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[5] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equation*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[7] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[8] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями”, *Автомат. и телемех.*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “On controlling objects whose

motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Autom. Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[9] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам", *Дифференциальные уравнения*, **53**:11 (2017), 1473; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of mappings in vector metric spaces with applications to differential equations and control systems", *Differential Equations*, **53**:11 (2017), 1440 –1448.

[10] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, "Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения", *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, "Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points", *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[11] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений", *Уфимский матемтический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 42–55.

[12] В. Мерчела, "К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, "About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[13] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:4 (2019), 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **25**:4 (2019), 52–63 (In Russian)].

[14] Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н П. Пучков, "Приложения накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений", *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, **165** (2019), 21–33. [E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, "Applications of covering mappings in the theory of implicit differential equations", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **165** (2019), 21–33 (In Russian)].

[15] А. В. Арутюнов, "Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки", *Доклады РАН*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "Covering mappings in metric spaces and fixed points", *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[16] А. В. Арутюнов, "Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений", *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "Stability of coincidence points and properties of covering mappings", *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.

[17] И. В. Шрагин, "Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, "Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[18] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities", *St. Petersburg Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[19] А. Д. Иоффе , В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems.* V. 6, Stud. Math. Appl., North-Holland–Amsterdam–New York, 1979.

[20] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, ЛИБРОКОМ, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multi-Valued Mappings and Differential Inclusions*, Librokom Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант. Лаборатория прикладной математики и моделирования, Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
Поступила после рецензирования 14.01.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory, University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Received 10.11.2020
Reviewed 14.01.2021
Accepted for press 05.03.2021